

РОЗРОБКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ВИРІШЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ N ТІЛ

Запорізька державна інженерна академія, кафедра ПЗАС

У давнину люди вважали, що Земля є плоским або опуклим кругом, який тримається на кам'яних стовпах. Стародавні індійці думали, що стоячи на великій черепасі, чотири слони тримають півкулю Землі. У Месопотамії існувала думка, що Земля тримається на китах, а кити плавають по воді. Учений Піфагор, який жив за дві з половиною тисячі років до нашої ери, вважав, що Земля – це куля, в якій немає верху та низу. Через двісті років після Піфагора старогрецький учений і філософ Аристотель, вивчаючи будову Всесвіту, висловив думку, що Земля – центр Всесвіту, а навколо неї обертаються Сонце і Місяць, планети і зорі. Приблизно через п'ятсот років після Аристотеля жив грецький учений Птоломей, який створив свою систему Всесвіту. Він учив, що всі небесні тіла рухаються навколо Землі в порожньому світовому просторі. 500 років тому всі попередні уявлення про будову Всесвіту спростував польський учений Микола Коперник. Він після тривалих спостережень і завдяки складним математичним розрахункам довів, що Земля є не центром Всесвіту, а лише однією з планет, що обертаються навколо Сонця. Ще трохи більш ніж за сто років Ісаак Ньютон опублікує свої «Математичні начала натуральної філософії», де він сформулює закон всесвітнього тяжіння і три закони руху, що поляжуть в основу механіки.

Гравітаційна задача N тіл є класичною проблемою небесної механіки і гравітаційної динаміки Ньютона [1-3]. Вона формулюється наступним чином. Дано N матеріальних точок, маси котрих відомі. Нехай попарна взаємодія точок підкоряється закону тяжіння Ньютона. Нехай відомі початкові на момент часу $t=0$ координати і швидкості кожної точки. Необхідно знайти координати точок для усіх наступних моментів часу.

Математична модель даної задачі описується наступною системою рівнянь:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^N G m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3},$$

де m_i , $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$ - маса, радіус-вектор і швидкість i -го тіла відповідно.

Незважаючи на простоту формул, аналітичного рішення даної задачі в загальному вигляді для $N > 3$ не існує. Випадок для однієї точки не розглядається, адже гравітаційна взаємодія – це явище, у якому беруть участь, як мінімум, два об'єкти. Задача двох тіл є найпростішою нетривіальною задачею небесної механіки, рішенням якої є барицентрична небесна орбіта. Для задачі трьох тіл Генріхом Брунсом А також Анрі Пуанкаре було доведено, що не існує алгебраїчних або однозначних трансцендентних функцій координат і швидкостей. Окрім цього, відомо лише 5 точних рішень задачі трьох тіл для спеціальних початкових швидкостей і координат об'єктів.

З розвитком комп'ютерної техніки стало можливим вивчати властивості гравітаційних систем шляхом чисельного рішення системи рівнянь руху (тобто таких систем, де знаходження коренів системи рівнянь є наближеним). До них належать:

- Метод Рунге-Кутти
- Ньютона
- Гауса

Але ці методи мають ті ж самі проблеми, що й аналітичні – при тісному зближенні тіл дуже швидко збільшуються чисельні помилки. Окрім цього, зі збільшенням числа тіл

також зростає число обчислень сили на кожному кроці інтегрування приблизно як N^2 . Це ускладнює моделювання систем, що складаються з десятків тіл.

Для вирішення цієї проблеми застосовують наступні алгоритми [4-6]:

- Схема Ахмада-Коена
- Treecode

У схемі Ахмада-Коена пропонується розділити силу, що діє на кожне тіло, на дві складові – іррегулярну та регулярну. Під іррегулярною силою мається на увазі сила, що діє від близьких сусідів, в той час коли регулярними є сили, що діють від більш віддалених тіл. Відповідно, регулярну силу можна обчислювати зі значно більшим кроком, ніж іррегулярну.

Treecode – апроксимаційний алгоритм для моделювання гравітаційної задачі N тіл. Зазвичай тривимірний простір розбивається на кубічні сегменти у вигляді октантів. Тіла із сусідніх сегментів розглядаються індивідуально, а тіла з віддаленого сегмента можуть розглядатися як єдиний елемент з центром у точці його центру мас. Така схема дозволяє значно скоротити кількість необхідних обчислень. Таким чином складність алгоритму становить $O(n \log n)$, на відміну від алгоритму, побудованому на методі прямої суми, де складність становить $O(n^2)$.

Описані методи вирішення гравітаційної задачі дозволяють побудувати моделі гравітаційних систем різної складності: від простих - наприклад, сонячної, з тілами-планетами і їхніми супутниками, що обертаються навколо Сонця, до більш складних – скупчення зірок, чи симуляцій зіткнення галактик. Для досягнення прийнятної для наочної демонстрації роботи системи запропоновані алгоритми можна піддати процесу розпаралелізації і перекласти обчислення на графічний процесор, архітектура якого дозволяє одночасно виконувати відносно нескладні операції в десятках потоків.

Висновки:

- розглянуто класичну проблему небесної механіки і гравітаційної динаміки Ньютона – гравітаційну задачу N тіл;
- розглянуто популярні методи для вирішення задачі N тіл не аналітичним способом, їхні переваги та недоліки.

Література

1. Гравітаційна задача N тіл, Wikipedia – [Електронний ресурс] - Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/N-body_problem
2. Холшевников К.В. Задача двух тел: Учебное пособие/ Холшевников К.В., Титов В.Б. – СПб – 2007
3. А.П. Маркеев, Задача трех тел. И её точные решения – Московский государственный авиационный институт. - 1999
4. Treecode - Canadian Institute for Theoretical Astrophysics – [Електронний ресурс] - Режим доступу до ресурсу: <http://www.cita.utoronto.ca/~dubinski/treecode/node2.html>
5. Barnes-Hut simulation, Wikipedia [Електронний ресурс] - Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Barnes%E2%80%93Hut_simulation
6. Makino, J. & Aarseth, S. J, On a Hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems. – 1992