

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЗІ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ

Запорізька державна інженерна академія, кафедра ВПМ

Студентські олімпіади з математики зазвичай містять певну кількість завдань, розв'язок яких базується на використанні диференційного числення. В формулюваннях таких вправ може бути натяк на використання певних знань з цього розділу, але частіше завдання сформульовано таким чином, що необхідно проявити творчий підхід і математичну інтуїцію для вибору саме того розділу математики, який може бути корисним в даному випадку. Подані нижче приклади дають можливість розглянути обидва варіанти.

1) Чи існують функції $f(x)$ і $g(x)$, які не дорівнюють константі і задовольняють в деякому проміжку умові

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x).$$

(1)

Для розв'язку цього завдання необхідно використати правила диференціювання функцій однієї змінної і представити дану рівність у вигляді:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{g(x)}{g'(x)} = 1$$

(2)

Потім за припущенням що відношення $\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{k}$, де $k = \text{const} \neq 0, k \neq 1$, розв'язавши два диференціальних рівняння зі змінними, що відокремлюються, можна знайти конкретні функції $f(x)$ і $g(x)$, для яких буде виконуватися дана рівність, а саме:

$$f(x) = e^{kx}, \quad g(x) = e^{\frac{kx}{k-1}}. \quad (3)$$

2) Не використовуючи таблиць і калькулятора, порівняти числа $\log_{2008} 2009$ і $\log_{2009} 2010$.

Дані числові вирази можна розглянути як значення функції $y = \log_x(x+1)$ при $x = 2008$ і $x = 2009$. Тоді, дослідивши функцію на монотонність за допомогою апарату диференційного числення, можна зробити висновок, що вона є спадною на всій області визначення. Звідси випливає, що більшому значенню аргументу буде відповідати менше значення функції. Отже, в результаті отримаємо $\log_{2008} 2009 > \log_{2009} 2010$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.- М.: Гос.изд-во физ.-мат.лит-ры. -1962. -856с.